Απ 1.

No. Date 25/10/17

Άλγεβρα των ορίων

Πρόταση: Αν $\lim a_n = l_1$ και $\lim b_n = l_2$, τότε $\exists$ το $\lim(a_n+b_n)$ και ισούται με l_1+l_2.

Απόδειξη

Έστω $\epsilon>0$

$\lim a_n = l_1 \Rightarrow \exists\, n_1$ τ.ω. $|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$

$\lim b_n = l_2 \Rightarrow \exists\, n_2$ τ.ω. $|b_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$

Θέτω $n_0 = \max(n_1, n_2)$

Για $n \geq n_0$ ισχύουν ταυτόχρονα τα παραπάνω

(προσθέτω κατά μέλη): $|a_n - l_1| + |b_n - l_2| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$

$\xrightarrow{\text{τρ. ανισ.}} |a_n + b_n - (l_1+l_2)| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$

Έπεται ότι η ακολουθία (a_n+b_n) έχει όριο $\lim(a_n+b_n) = l_1+l_2$

Παρατήρηση

Π.χ. $\lim a_n = l_1$, $\lim b_n = l_2$, $\lim c_n = l_3$.

$\lim((a_n+b_n)+c_n) = l_1+l_2+l_3$

Πρόταση: Αν c σταθερά και $\lim a_n = l$ τότε $\lim(c a_n)$ $\exists$ και ισούται με cl

Απόδειξη

Αν $c=0$, τότε $c a_n \equiv 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

άρα προφανώς $\lim c \cdot a_n = 0 = 0 \cdot l$

Αν $c \neq 0$, έστω $\epsilon > 0$

$\lim a_n = l \rightsquigarrow \exists\, n_0$ τ.ω. $|a_n - l| < \frac{\epsilon}{|c|}$ $\forall n \geq n_0$

$\rightsquigarrow |c| \cdot |a_n - l| < \epsilon$, $n \leq n_0$

$|c \cdot a_n - cl| < \epsilon$, $\forall n \leq n_0$

$\rightsquigarrow \lim(c \cdot a_n) = c \cdot l$

No. Date

Παρατήρηση: $\lim a_n = l_1$, $\lim b_n = l_2 \rightsquigarrow \lim(a_n - b_n) = l_1 - l_2$

Δηλαδή $\exists \lim((-1)b_n) = -\lim b_n = -l_2$.

$a_n - b_n = \underbrace{a_n}_{\to l_1} + \underbrace{(-b_n)}_{\to -l_2}$

Από όριο και διάταξη: $a_n \geq 0$ $n \geq n_0 \rightsquigarrow \lim a_n \geq 0$ και $\exists \lim a_n$

Επίσης αν $\lim a_n > 0 \rightsquigarrow a_n > 0$ $n \geq n_0$

Παρατήρηση: Έστω $\lim a_n = l_1$ και $\lim b_n = l_2$.

- Αν $l_1 > l_2$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $a_n > b_n$ $n \geq n_0$

$\lim(a_n - b_n) = l_1 - l_2 > 0$

$\rightsquigarrow a_n - b_n > 0$ $n \geq n_0$

- Αν $l_1 < l_2$ τότε $\exists n_0$: $a_n < b_n$ $n \geq n_0$
- Αν $\lim a_n = l_1$, $\lim b_n = l_2$ και $a_n \geq b_n$ $\forall n \geq n_1$

Τότε $l_1 \geq l_2$

Απόδειξη

Θεωρούμε $d_n = a_n - b_n$

Τότε $d_n \geq 0$ $n \geq n_1$, $\exists \lim d_n = l_1 - l_2$

$\rightsquigarrow \lim d_n = l_1 - l_2 \geq 0$

Παράδειγμα: Αν $A > 1$, ν.δ.ο. $\lim \frac{1}{A^n} = 0$.

Υπόδειξη: Ανισότητα Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x > 0$.

$A = 1 + \overbrace{(A-1)}^{x>0}$

$A^n = (1 + (A-1))^n \geq 1 + n(A-1)$

$0 \leq \frac{1}{A^n} \leq \frac{1}{1+n(A-1)} \leq \frac{1}{(A-1)n}$

Ξέρω $\lim \frac{1}{n} = 0 \rightsquigarrow \lim \frac{1}{A-1} \cdot \frac{1}{n} = 0$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim \frac{1}{A^n} = 0$

Πρόταση: Έστω $(a_n),(b_n)$ ακολουθίες με $\lim a_n = \ell_1$, $\lim b_n = \ell_2$.
Τότε $\lim(a_n b_n)$ $\exists$ και ισούται με $\ell_1 \ell_2$

Απόδειξη

Θ.δ.ο. $\forall \epsilon>0$, $\exists n_0$ τ.ω. $|a_n b_n - \ell_1\ell_2| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$

Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$.

$$|a_nb_n - \ell_1\ell_2| = |a_nb_n - a_n\ell_2 + a_n\ell_2 - \ell_1\ell_2| = |a_n(b_n-\ell_2) + \ell_2(a_n-\ell_1)| \leq$$

$$\leq |a_n(b_n-\ell_2)| + |\ell_2(a_n-\ell_1)| = |a_n||b_n-\ell_2| + |\ell_2||a_n-\ell_1| \leq$$

Η a_n είναι συγκλίνουσα άρα είναι φραγμένη, άρα απόλυτα φραγμένη, έτσι $\exists\, \theta>0$ τ.ω. $|a_n| \leq \theta$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\leq \theta|b_n-\ell_2| + |\ell_2||a_n-\ell_1| \quad (*)$$

$b_n \to \ell_2 \rightsquigarrow b_n - \ell_2 \to 0 \rightsquigarrow |b_n-\ell_2| \to 0$

Η $b_n \to \ell_2$ άρα $(b_n-\ell_2)$ πάει στο μηδέν, άρα $|b_n-\ell_2|$ πάει στο 0

Η $a_n \to \ell_1$ άρα $(a_n-\ell_1)$ πάει στο μηδέν άρα $|a_n-\ell_1|$ πάει στο 0

Άρα $|a_nb_n - \ell_1\ell_2| \to 0$ άρα $(a_nb_n - \ell_1\ell_2) \to 0$.

2ος τρόπος

$b_n \to \ell_2 \rightsquigarrow \exists n_1 : |b_n - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2\theta}$, $\forall n \geq n_1$

$a_n \to \ell_1 \rightsquigarrow \exists n_2 : |a_n - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2(|\ell_2|+1)}$ $\forall n \geq n_2$

Θέτω $n_0 = \max(n_1,n_2)$, για $n \geq n_0$ ισχύουν τα παραπάνω.

$$(*) < \frac{\theta\epsilon}{2\theta} + |\ell_2|\frac{\epsilon}{2(|\ell_2|+1)} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon|\ell_2|}{2(|\ell_2|+1)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Παρατήρηση: $\lim a_n = \ell_1$, $\lim b_n = \ell_2$, $\lim c_n = \ell_3$

$\rightsquigarrow \lim(a_nb_nc_n) = \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_3$

No. Date

Παράδειγμα: Ν.Δ.ο. $\lim \frac{n}{4^n} = 0$

$4^n = (1+3)^n \geq 1+3n > 3n$

$\frac{n}{4^n} < \frac{1}{3} \quad \forall n$

Αυτό μας δείχνει ότι η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από το 0 και άνω φραγμένη από το $\frac{1}{3}$

$0 \leq \frac{n}{4^n} = \frac{n^{1/2}}{2^n} \cdot \frac{n^{1/2}}{2^n} < \frac{n^{1/2}}{n} \cdot \frac{n^{1/2}}{n} = \frac{1}{n}$

$2^n \geq (1+1)^n \geq 1+n \geq n$

$0 \leq \frac{n}{4^n} < \frac{1}{n}$ Από κρ. παρεμβολής $\lim \frac{n}{4^n} = 0$.

$\searrow 0 \quad \downarrow 0 \quad \downarrow 0$

Πρόταση: Έστω b_n ακολουθία με $\lim b_n = l \neq 0$. Τότε $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{l}$.

Απόδειξη

Από λήμμα στην ενότητα όριο και διάταξη

$\exists n_1: \frac{|l|}{2} < |b_n| < \frac{3|l|}{2} \quad \forall n \geq n_1$

$\rightsquigarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|l|} \quad n \geq n_1$

Έστω $\epsilon > 0$: $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{b_n - l}{b_n l} \right| < \frac{2}{|l|^2} |b_n - l| \to 0$

2ος τρόπος

$|b_n - l| < \frac{\epsilon |l|^2}{2}$

No. Date

$b_n \to l \rightsquigarrow \exists\, n_2 : |b_n - l| < \frac{\epsilon |l|^2}{2} \quad \forall n \geq n_2$

Θέτω $n_0 = \max(n_1, n_2)$ $\quad n \geq n_0$

$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l}\right| < \frac{2}{|l|^2} \cdot \frac{\epsilon |l|^2}{2} = \epsilon$

Άσκηση: Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim a_n = l$
Ν.δ.ο. $(l \geq 0)$

- $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$
- $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{l}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

Να κάνω τον 2ο τρόπο με τα "ε" σπίτι!!

Λύση (1ος τρόπος)

- 1η περίπτωση: $l = 0$

Έστω $\epsilon > 0$ δηλαδή $\lim a_n = 0$

$|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n}$

$a_n \to 0 \rightsquigarrow \exists\, n_0$ τ.ω. $|a_n - 0| < \epsilon^2$, $\forall n \geq n_0$

« $b_n < \epsilon^2$ »

$\rightsquigarrow |\sqrt{a_n} - 0| < \sqrt{\epsilon^2} < \epsilon$, $n \geq n_0$

- 2η περίπτωση: $l \neq 0$

$0 \leq |\sqrt{a_n} - \sqrt{l}| = \frac{|(\sqrt{a_n} - \sqrt{l})(\sqrt{a_n} + \sqrt{l})|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}}$

μηδενική ακολουθία

$= \frac{|(\sqrt{a_n})^2 - (\sqrt{l})^2|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}} = \frac{|a_n - l|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}} \leq \frac{|a_n - l|}{\sqrt{l}}$

$\sqrt{a_n} + \sqrt{l} \geq \sqrt{l}$

$a \to l \overset{\Leftrightarrow}{\rightsquigarrow} a_n - l \to 0$

$\overset{\Leftrightarrow}{\rightsquigarrow} |a_n - l| \to 0$

$\rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{l}} |a_n - l| \to 0$

No. Date

$0 \le |\sqrt{a_n} - \sqrt{\lambda}| \le \dfrac{|a_n - \lambda|}{\sqrt{\lambda}}$

Άρα από κρ. παρεμβολής $|\sqrt{a_n} - \sqrt{\lambda}| \to 0$.

• Για $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{l}$.

[Ταυτότητα: $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$]

• Για $l \neq 0$

$a = \sqrt[k]{a_n}$ $\quad b = \sqrt[k]{l}$

$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{l}|$ ...... (εφαρμόζω την ταυτότητα)
για το σπίτι.

Κριτήριο Σύγκλισης

Πρόταση: (i) Αν (a_n) αύξουσα (↗) και άνω φραγμένη, τότε συγκλίνει και $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
(ii) Αν (a_n) φθίνουσα (↘) και κάτω φραγμένη, τότε συγκλίνει και $\lim a_n = \inf a_n$

Απόδειξη

(i) Έστω $\epsilon > 0$

$\exists\, n_0$ τ.ω. $a_{n_0} > \sup a_n - \epsilon$ (αν όχι, $a_n \le \sup a_n - \epsilon \ \forall n$ $\rightarrow$ $\sup a_n - \epsilon$ θα ήταν μικρότερο άνω φράγμα από $\sup a_n$)

$a_{n_0} > \sup a_n - \epsilon$

(a_n) αύξουσα $\rightarrow a_n \ge a_{n_0} \ \forall n \ge n_0$

$\rightarrow a_n > \sup a_n - \epsilon \ \forall n \ge n_0$

$-\epsilon < a_n - \sup a_n \le 0 \ \forall n \ge n_0$

No. Date

$\to |a_n - \sup a_n| < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$

ομοίως για την (ii).

Πόρισμα : Κάθε φραγμένη και μονότονη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Χαρακτηριστικά όρια

$\lim \sqrt[n]{a} = 1$ για οποιοδήποτε $a > 0$.

Απόδειξη

Αν $a = 1$ τότε είναι προφανές $\sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Αν $a > 1 \to \sqrt[n]{a} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Γράφω $\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n$ με $\theta_n > 0$ $(\theta_n = \sqrt[n]{a} - 1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\to a = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n > n\theta_n \quad \forall n$

$0 < \theta_n < \frac{a}{n}$

$\to 0$

$\theta_n = \sqrt[n]{a} - 1 \longrightarrow 0$

Αν $a \in (0,1)$

$\to \frac{1}{a} > 1$

$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$

$\|$

$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

Αν $b_n \to l \neq 0$

$\to \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{l}$

$b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$

$\to \frac{1}{b_n} = \sqrt[n]{a} \to 1$